Unidad VIII: Aplicación de transformada (continuación)

8.1 Discretización de sistemas continuos[1]

En este capítulo se estudian distintos procedimientos para obtener sistemas en tiempo discreto que se comporten aproximadamente igual que un sistema en tiempo continuo dado. Esta operación suele denominarse discretización. El problema no tiene solución exacta en general, aunque las diferentes técnicas que se describirán son de frecuente aplicación, sin gran problema si el periodo de muestreo es pequeño.

Ejemplos de aplicaciones son:

a) La simulación con ordenador de un sistema en tiempo continúo. En esencia, es una discretización, como lo son las técnicas numéricas de integración de ecuaciones diferenciales.

b) El diseño de un filtro digital basado en un diseño analógico anterior.

c) El diseño de un regulador digital basado en un diseño analógico.

Un sistema se puede ver como cualquier proceso que produce una transformación de señales. Entonces un sistema tiene una señal de entrada una señal de salida la cual está relacionada con la entrada a través de la transformación del sistema.

Nos interesan tanto sistemas en tiempo continuo como en tiempo discreto.

Un sistema de tiempo continuo es aquel en el que las señales de entrada de tiempo continuo son transformadas en señales de salida de tiempo continuo. Tales sistemas se señalan en forma gráfica como:

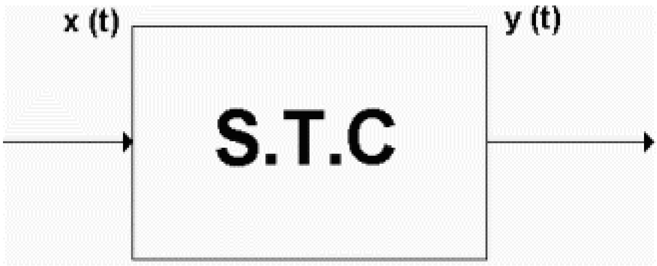

Figura 8.1.1.- Señal de salida continuo

De forma similar, un sistema de tiempo discreto, transforma entradas de tiempo discreto en salidas de tiempo discreto, así:

Figura 8.1.2.- Señal de salida continuo

[1] Johnsonbaugh, Richard (2005). Matemáticas Discretas.

Los sistemas se pueden conectar en serie, en paralelo, o en serie – paralelo como en los diagramas siguientes:

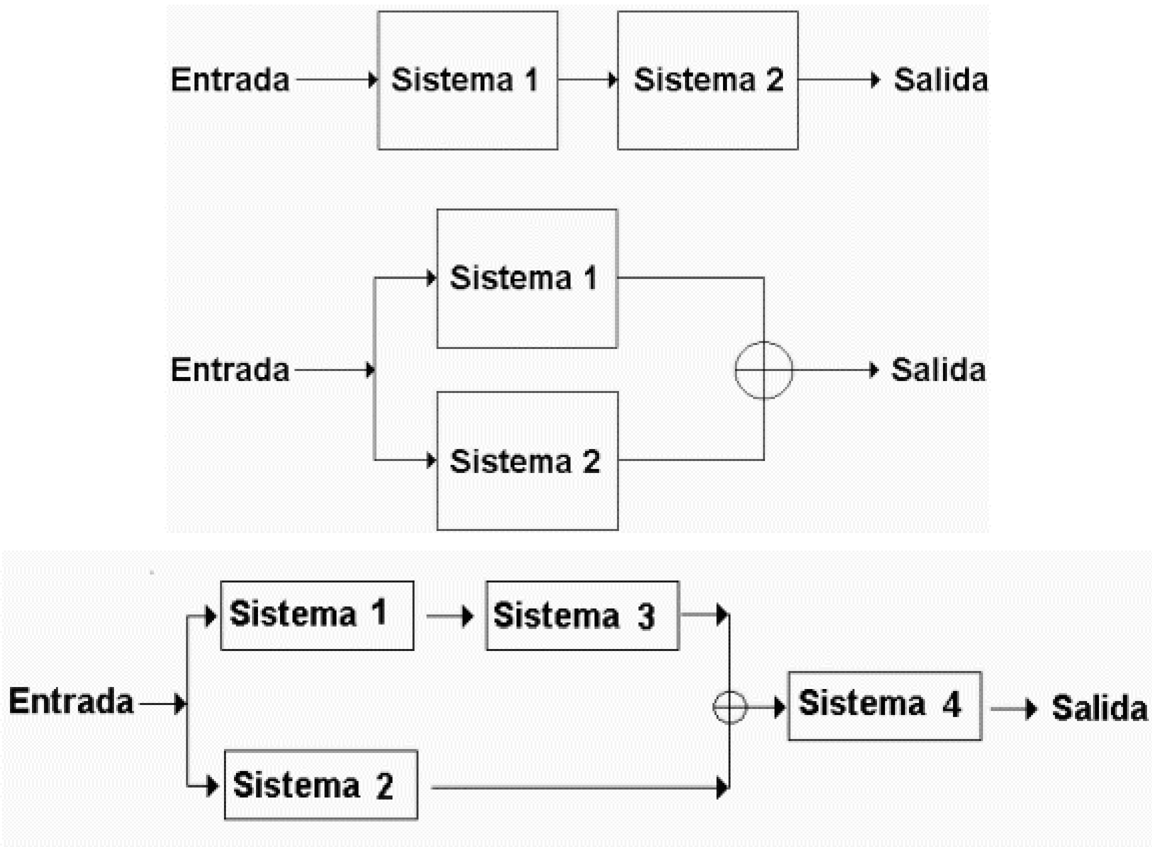

Figura 8.1.3.- Señal de salida continúo en paralelo

El símbolo denota que la suma o adición es la suma de la salida de los sistemas.

Los sistemas de control de tiempo discreto (STD) son sistemas dinámicos para los cuales una ó más de sus variables solamente son conocidas en ciertos instantes.

Por lo tanto, son aquellos que manejan señales discretas, a diferencia de los sistemas de tiempo continuo (STC) en los cuales sus variables son conocidas en todo momento.

El hecho de que algunas funciones del tiempo propias del STD varíen en forma discreta, puede provenir de una característica inherente al sistema, como en el caso de aquellos que trabajan con algún tipo de barrido, por ejemplo: un sistema de radar.

La otra posibilidad es que la variación discreta provenga de un proceso de muestreo de alguna señal, y estos últimos son los que interesan en este estudio.

Este proceso de muestreo, que convierte una señal analógica o de tiempo continuo en una señal discreta o muestreada, podría hacerse a un ritmo constante, variable según alguna ley de variación o aleatorio.

La discretización de una señal es el paso previo para su digitalización, proceso que agrega una determinada codificación a la señal muestreada. La digitalización de las señales es un proceso imprescindible para poder procesar las mismas en computadoras digitales, y presenta además las ventajas de permitir su transmisión con una mayor densidad y velocidad en la información, además de reducir el costo y volumen de los equipos debido a que se requieren magnitudes de energía significativamente más bajas, etc.

El muestreo:

El proceso de muestreo consiste básicamente en producir una alternancia entre los intervalos de presencia de señal y ausencia de la misma, como si se "tomaran muestras" de la señal analógica.

Es equivalente al trabajo de una llave o interruptor electrónico que se abre y se cierra alternadamente, permitiendo el paso de la señal sólo en determinados instantes, que se denominan instantes de muestreo.

A la entrada del dispositivo de muestreo, llamado "muestreador", aparece una señal (función del tiempo) analógica y a la salida resultará muestreada o discretizada, lo que se indica con un asterisco.

Asimismo, la señal de salida que está muestreada o discretizada [x*], no será función del tiempo continuo, sino precisamente función de los instantes discretos para los cuales ha quedado definida, que se indican como kT, donde k=1,2,3,4,5,…; y T es el intervalo o periodo de muestreo.

Proceso de muestreo:

En un sistema de control, el muestreo puede tener lugar en uno ó más puntos del sistema y el muestreador se representa simbólicamente por un interruptor intercalado en el lugar donde se produce el proceso de muestreo.

Básicamente, se ingresa al muestreador con una señal analógica, de tiempo continuo y a la salida se obtiene una señal discreta.

En definitiva el proceso opera como una modulación en amplitud que produce la señal continua sobre un tren de pulsos p(t). Este tren de pulsos es provocado por la apertura y cierre del interruptor de muestreo a intervalos regulares.

Así como en los STC se describe su comportamiento por medio de las ecuaciones diferenciales correspondientes, en los STD se utilizan ecuaciones de diferencias para representarlos matemáticamente.

Teorema de Shannon:

Justamente este teorema establece cuál debe ser la mínima frecuencia de muestreo ωs, comparada con la máxima frecuencia de la señal analógica ωc, para que no se produzca superposición de espectros y en consecuencia pérdida de información al discretizar la señal original.

El teorema dice:

"La frecuencia de muestreo debe ser por lo menos igual o mayor que el doble de la máxima frecuencia de la señal analógica, para permitir la posterior recuperación de información a partir de la señal discreta"

$$\omega s \geq 2\, \omega c$$

En general, en la práctica es preferible que la frecuencia de muestreo sea por lo menos entre cinco (5) y diez (10) veces mayor que la máxima de la señal continua para discretizar de un modo confiable. Esta es una de las razones del comentario anterior, donde se decía que una de las condiciones para poder muestrear una señal analógica es que tuviera un ancho de banda limitado.

Tasa de Nyquist

En 1927, Nyquist determinó que el número de pulsos independientes que podían pasar a través de un canal de telégrafo, por unidad de tiempo, estaba limitado a dos veces el ancho de banda del canal.

$$f_p \leq 2B$$

Donde $f_p$es la frecuencia del pulso (en pulsos por segundo) y Bes el ancho de banda (en hercios). La cantidad $2B$se llamó, más adelante, tasa de Nyquist, y transmitiendo a esta tasa de pulsos límite de $2B$pulsos por segundo se le denominó señalización a la tasa de Nyquist.

Nyquist publicó sus resultados en 1928 como parte de su artículo "Certain topics in Telegraph Transmission Theory".

Ley de Hartley

Durante ese mismo año, Hartley formuló una manera de cuantificar la información y su tasa de transmisión a través de un canal de comunicaciones. Este método, conocido más adelante como ley de Hartley, se convirtió en un importante precursor para la sofisticada noción de capacidad de un canal, formulada por Shannon.

Hartley indicó que el número máximo de pulsos distintos que se pueden transmitir y recibir, de manera fiable, sobre un canal de comunicaciones está limitado por el rango dinámico de la amplitud de la señal y de la precisión con la cuál el receptor puede distinguir distintos niveles de amplitud.

De manera específica, si la amplitud de la señal transmitida se restringe al rango de $[-A ... +A]$ $voltios$, y la precisión del receptor es +/- $\Delta V voltios$, entonces el número máximos de pulsos distintos M está dado por:

$$M = 1 + \frac{A}{\Delta V}$$

Tomando la información para ser el logaritmo del número de los mensajes distintos que podrían ser enviados, Hartley después construyó una medida de la información proporcional al ancho de banda del canal y a la duración de su uso. A veces sólo se habla de dicha proporcionalidad cuando se cita a la ley de Hartley.

Posteriormente, Hartley combinó la observación de Nyquist,2 y su propia cuantificación de la calidad o ruido de un canal en términos del número de niveles de pulso que podían ser distinguidos, de manera fiable y denotados por M, para llegar a una medida cuantitativa de la tasa de información que se puede obtener.

La ley de Hartley se explica, cuantitativamente, de manera usual, como la tasa de información alcanzable de Rbits por segundo, (b/s):

$$R = 2B \log_2(M)$$

Hartley no resolvió, de manera precisa cómo el parámetro Mdebe depender de las estadísticas de ruido del canal, o cómo la comunicación podía ser fiable incluso cuando los pulsos individuales correspondientes a símbolos no se pudieran distinguir, de manera fiable, de los niveles de M; con las estadísticas del ruido gaussiano.

Los diseñadores de sistemas tienen que elegir un valor muy conservador de M para alcanzar la mínima tasa de error.

El concepto de una capacidad libre de errores aguardó hasta que Claude Shannon investigó sobre las observaciones de Hartley con respecto a la medida logarítmica de la información y las observaciones de Nyquist sobre el efecto de las limitaciones del ancho de banda del canal.

El resultado de la tasa de Hartley se puede ver como la capacidad de un canal M sin errores de $2B$ símbolos por segundo. Algunos autores se refieren a ello como capacidad. Pero ese supuesto canal, libre de errores, es un canal ideal, y el resultado es, necesariamente, menor que la capacidad de Shannon de un canal con ruido de ancho de banda B, que es el resultado Hartley-Shannon que se estimó más adelante.

Teorema de codificación de canales con ruido y capacidad

El desarrollo de la teoría de la información de Claude Shannon durante la Segunda Guerra Mundial estimuló el siguiente gran paso para entender qué cantidad de información se podría comunicar, sin errores y de manera fiable, a través de canales con ruido gausiano de fondo.

Fundamentado sobre las ideas de Hartley, el teorema de Shannon de la codificación de canales con ruido (1948) describe la máxima eficiencia posible de los métodos de corrección de errores versus los niveles de interferencia de ruido y corrupción de datos. La prueba del teorema muestra que un código corrector de errores construido aleatoriamente es, esencialmente, igual de bueno que el mejor código posible. El teorema se prueba con la estadística de tales códigos aleatorios.

El teorema de Shannon demuestra cómo calcular la capacidad de un canal sobre una descripción estadística del canal y establece que, dado un canal con ruido con capacidad C e información transmitida en una tasa R, entonces si

$$R < C$$

Existe una técnica de codificación que permite que la probabilidad de error en el receptor se haga arbitrariamente pequeña. Esto significa que, teóricamente, es posible transmitir información casi sin error hasta un límite cercano a C bits por segundo.

El inverso también es importante. Si

$$R > C$$

La probabilidad del error en el receptor se incrementa sin límite mientras se aumente la tasa. De esta manera no se puede transmitir ninguna información útil por encima de la capacidad del canal. El teorema no trata la situación, poco frecuente, en que la tasa y la capacidad son iguales.

Se pueden diseñar sistemas para, por ejemplo, calcular expresiones aritméticas complicadas, como el que ilustra el siguiente diagrama para el cálculo de:

$$y[n] = \left(2x[n] - x[n]^2\right)^2 \quad \text{así :}$$

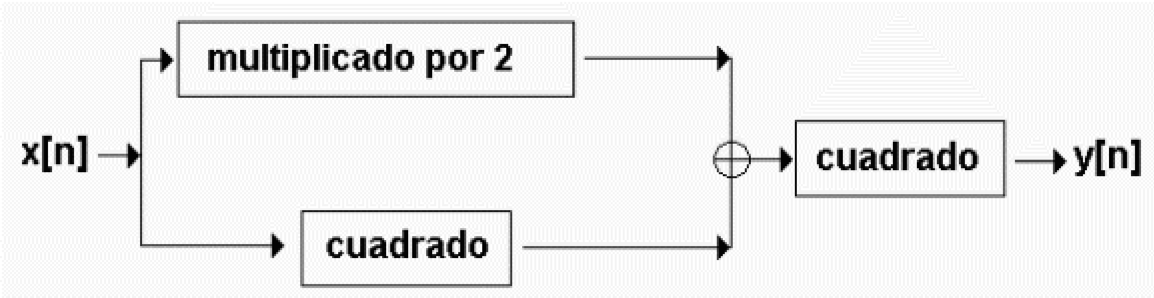

Figura 8.1.4.- Señal de salida de una función en paralelo

Otro tipo de sistema es la interconexión de retroalimentación como en la siguiente figura.

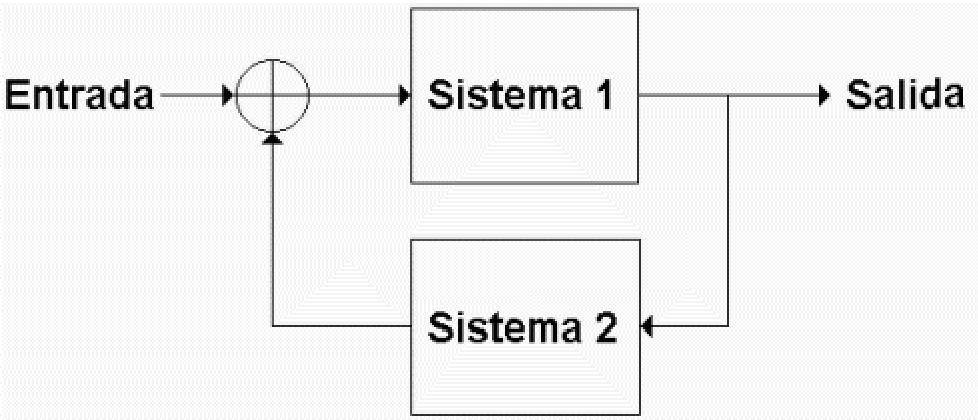

Figura 8.1.5.- Señal de salida en retroalimentación

Acá la salida del sistema 1 es la entrada al sistema 2, mientras que la salida del sistema 2 se retroalimenta y se suma a la entrada externa para producir la entrada actual al sistema 1.

Sistemas con y sin memoria.

Se dice que un sistema es sin memoria si su salida para cada valor de su variable independiente depende sólo de la entrada en ese mismo instante de tiempo. Por ejemplo el sistema que ilustra la ecuación:

$$y[n] = \left(2x[n] - x[n]^2\right)^2$$

Es sin memoria, ya que el valor de y[n] en un instante n depende sólo del valor de x[n] en ese mismo instante.

Un resistor es un sistema sin memoria, así la relación entrada - salida es de la forma:

$$y(t) = R \cdot x(t)$$

Donde R es resistencia, x(t) es corriente y y(t) es voltaje.

Un ejemplo de un sistema con memoria es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

Otro ejemplo es: $y(t) = x(t-1)$

Un capacitor es otro ejemplo de un sistema con memoria, ya que

$$y(t) = \frac{q}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Donde C es capacitancia, x(t) es corriente y y(t) es voltaje.

Invertibilidad.

Se dice que un sistema es invertible si distintas entradas producen distintas salidas. Dicho de otra forma, un sistema es invertible si al observar su salida podemos determinar la entrada.

Por ejemplo, $y(t) = 2x(t)$, entonces su sistema inverso es $z(t) = \frac{1}{2}y(t)$.

Al interconectarlos en serie se obtiene la entrada original como salida.

Otro ejemplo de sistema invertible es el dado por la ecuación:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

Para este sistema, la diferencia entre dos valores sucesivos de salida es precisamente el último valor de entrada. Por tanto, en este caso el sistema inverso es:

$$z[n] = y[n] - y[n-1]$$

$$x[n] \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \longrightarrow z[n] = y[n] - y[n-1] \longrightarrow z[n] = x[n]$$

Causalidad.

Un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores de la entrada en el tiempo presente y en el pasado. Tal sistema es llamado no anticipativo, ya que la salida no anticipa valores futuros de la entrada.

El movimiento de un automóvil es causal ya que no anticipa acciones futuras del conductor.

$$y(t) = x(t-1)$$

y

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Son sistemas causales.

$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$

y

$$y(t) = x(t+1)$$

No son sistemas causales.

Estabilidad.

Intuitivamente, un sistema estable es aquel en el que entradas pequeñas conducen a respuestas que no divergen.

Es decir, si la entrada a un sistema es limitada, entonces la salida debe ser también limitada y por tanto no debe diverger.

El sistema descrito por $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ con $x[n] = u[n]$;

Por tanto $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = (n+1)u[n]$

es un sistema inestable

Es decir, $y[0] = 1$, $y[1] = 2$, $y[2] = 3$ y $y[n]$ crece sin límite.

Invarianza en el tiempo.

Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento en tiempo de la señal de entrada causa un desplazamiento en tiempo de la señal de salida.

Es decir, si y[n] es la salida cuando x[n] es la entrada, entonces y[n-n0] es la salida cuando se aplica x[n-n0].

Ejemplo: sea y(t)=sen x(t)

Sean x1(t) y x2(t)= x1(t - to) dos entradas desplazadas en el tiempo.

$y_1(t) = \text{sen } x_1(t)$

$y_2(t) = \text{sen } x_2(t) = \text{sen } x_1(t - t_0)$

$y_1(t - t_0) = \text{sen } x_1(t - t_0)$

O sea que $y_2(t) = y_1(t - t_0)$.

O sea que el sistema es invariante en el tiempo.

Ejemplo. Sea el sistema de tiempo discreto descrito por: $y[n] = nx[n]$

Y consideremos dos entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ donde $x_2[n] = x_1[n - n_0]$.

$y_1[n] = nx_1[n]$

$y_2[n] = nx_2[n] = nx_1[n - n_0]$

$y_1[n - n_0] = (n - n_0)x_1[n - n_0] \neq y_2[n]$

Entonces el sistema es variante en el tiempo.

Linealidad.

Un sistema lineal en tiempo continuo o tiempo discreto, es aquel que posee la importante propiedad de superposición: Si una entrada consiste de la suma ponderada de varias señales, entonces la salida es sólo la superposición, esto es, la suma ponderada de las respuestas del sistema a cada una de estas señales.

Matemáticamente, el sistema es lineal si:

a) La respuesta a $x_1(t) + x_2(t)$ es $y_1(t) + y_2(t)$.

b) La respuesta a $ax_1(t)$ es $ay_1(t)$ donde a es una constante compleja.

Ejemplos: $y(t) = Rx(t)$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$z[n] = y[n] - y[n-1]$$

Ejemplos de sistemas no lineales son los descritos por:

$y(t) = x^2(t)$

$y(t) = \text{sen } x(t)$

Por último, un sistema incremental lineal de tiempo continuo o discreto es aquel que responde de manera lineal a cambios de entrada.

Ejemplo: $y[n] = 2x[n] + 3$

Así, $y_1[n] - y_2[n] = 2(x_1[n] - x_2[n])$

Esto es, la diferencia entre las respuestas de un sistema incremental lineal a cualquiera de dos entradas es una función lineal de la diferencia entre las dos entradas.

Hay que observar que y[n]=2x[n]+3 no es lineal.

Ejercicios

1. En el sistema descrito por z[n] = y[n] - y[n - 1], analizar:

a) Linealidad.

b) Invarianza en el tiempo.

c) Causalidad.

d) ¿El sistema tiene memoria?

e) Estabilidad.

2. En el sistema descrito por analizar los mismos aspectos del problema anterior. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

3. En las siguientes secuencias, para que valores de la variable independiente la parte par de la señal es cero

a) x[n] = u[n] - u[n - 3]

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$.

c) $x[n] = e^{-5n} u[n+2]$

4. Dada la señal discreta $x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$, determine los valores de los enteros M y n0 de manera que x[n] se exprese como x[n] = u[Mn - n0].

5. Considere un sistema S con entrada x[n] y salida y[n] obtenido mediante la conexión en serie de $S_1 : y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$ y $S_2 : y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2} x_2[n-3]$, donde x1[n] y x2[n] denotan señales de entrada. Determine la relación entrada-salida del sistema S.

6. Sea un sistema discreto cuya relación entrada salida es: $y[n] = x[n]x[n-2]$

a) ¿El sistema es sin memoria?

b) Determine la salida del sistema cuando la entrada es A δ [n], donde A es un número real o complejo.

c) ¿El sistema es invertible?

7. Considere un sistema discreto con entrada x[n] y salida y[n] relacionadas mediante $y[n] = \sum_{k=n-no}^{n+no} x[k]$, donde n_o es un entero positivo finito.

a) ¿El sistema es sin lineal?

b) ¿El sistema es invariante en el tiempo?

8. Determine cuál de las siguientes señales es o no periódica. Si la señal es periódica, determine su periodo fundamental.

a) $x[n] = e^{j7\pi n}$.

b) $x[n] = e^{\frac{j7\pi n}{5}}$

c) $x[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{7} n + 1\right)$.

d) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$.

9. Cuál de los siguientes sistemas es invertible. Si alguno lo es, construya el sistema inverso. Si no, encuentre dos señales de entrada al sistema que den la misma salida.

a) $y[n] = nx[n]$.

b) $y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq 1 \end{cases}$

c) $y[n] = x[1-n]$

d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$

e) $y[n] = x[2-n]$

10. Considere un sistema S con entrada x[n] y salida y[n] relacionadas mediante y[n]=x[n](g[n]+g[n-1])

a) Si g[n]=1 para toda n, demuestre que S es invariante en el tiempo.

b) Si g[n]=n para toda n, demuestre que S no es invariante en el tiempo.

c) Si g[n]= $1+(-1)^n$ para toda n, demuestre que S es invariante en el tiempo.

d) En todos los casos anteriores, ¿el sistema será lineal?

8.2 Formulación de un programa lineal[2]

La programación lineal es la interrelación de los componentes de un sistema, en términos matemáticos, ya sea en forma de ecuaciones o inecuaciones lineales llamado Modelo de Programación Lineal. Es una técnica utilizada para desarrollar modelos matemáticos, diseñada para optimizar el uso de los recursos limitados en una empresa u organización.

El Modelo de Programación Lineal, es una representación simbólica de la realidad que se estudia, o del problema que se va a solucionar. Se forma con expresiones de lógicas matemáticas, conteniendo términos que significan contribuciones: a la utilidad (con máximo) o al costo (con mínimo) en la Función Objetivo del modelo. Y al consumo de recursos disponibles (con desigualdades = ó = e igualdades =) en las restricciones.

En el presente texto desarrollaremos Modelos Matemáticos de Programación Lineal de: Maximización y Minimización, los cuales estarán indicados en la Función Objetivo del Modelo.

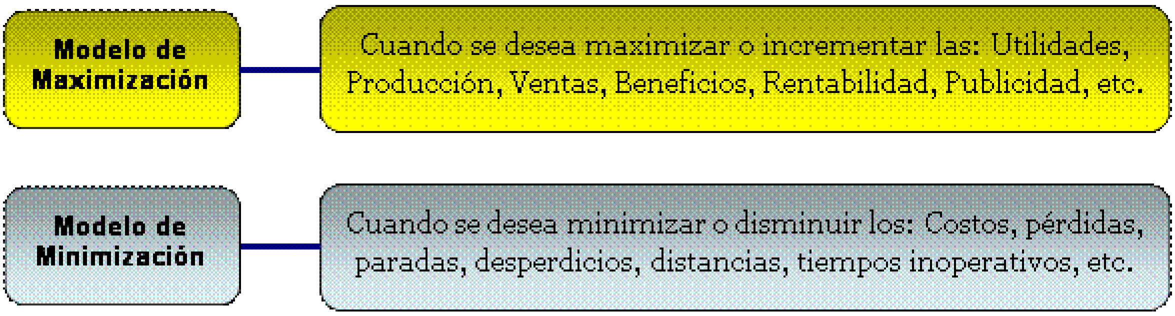

Figura 8.2.1.- Formulación de un problema

Problemas de aplicación para formular un modelo

1). Proceso de producción.- Una fábrica produce dos tipos de productos: M y N, los costos de producción de ambos productos son $3 para el producto M y $5 para el producto N. El tiempo total de producción está restringido a 500 horas; y los tiempos de producción son de 8 horas/unidad para el producto M y de 4 horas/unidad para el producto N. Formule el Modelo matemático que permita determinar la cantidad de productos M y N a producir, y que optimice el Costo total de producción de los dos productos.

[2] Johnsonbaugh, Richard (2005). Matemáticas Discretas.

Formulación del Modelo

En la formulación del modelo, podemos ayudarnos con la representación del Problema mediante un organizador gráfico o esquema:

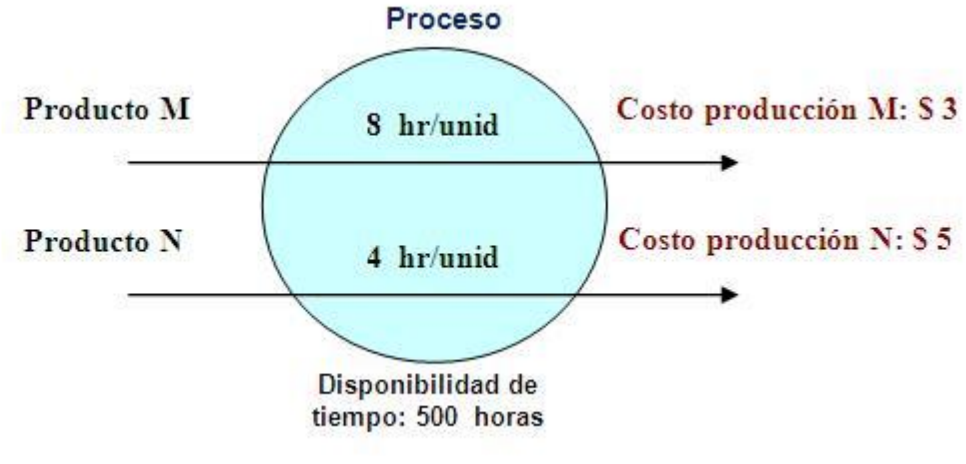

Figura 8.2.2.- Representación gráfica estadística

Definición de Variables

Se desea formular un modelo matemático para determinar la cantidad que debe producirse por cada producto (M y N), por lo tanto tendremos dos variables, representados por: x1 , x2.

Siendo: x1 = Cantidad a producirse del producto M,

x2 = Cantidad a producirse del producto N

Función Objetivo

Como se tiene información de Costos de producción de los productos M y N, el objetivo será minimizarlos:

Costo total de producción de M = (Costo unitario del producto M) (Cantidad a producirse del producto M)

Costo total de producción de M = (3 $/unidad) (x_1 unidades) = 3 x_1 $

Costo total de producción de N = (Costo unitario del producto N) (Cantidad a producirse del producto N)

Costo total de producción de N = (5 $/unidad) (x_2 unidades) = 5 x_2 $

Luego la Función Objetivo será Minimizar "C" igual al Costo total de producción del producto M más el Costo total de producción del producto N.

Matemáticamente la Función Objetivo es:

$$\textbf{Minimizar: } C = 3x_1 + 5x_2$$

Definición de Restricciones

El tipo de recurso en el problema es el tiempo (puede ser horas hombre u horas máquina). Formulamos la restricción, colocando en el lado izquierdo de la inecuación el consumo unitario de los productos M y N, y en el lado derecho la cantidad disponible del recurso (500 horas).

$$\underbrace{\overset{8\ hr/unid}{(\text{t. unitario prod. M})}\ \overset{x_1}{(\text{Cant. prod. M})} + \overset{4\ hr/unid}{(\text{t. unitario prod. N})}\ \overset{x_2}{(\text{Cant. prod. N})}}_{\text{LADO IZQUIERDO (Tiempo unitario por producto M y N)}} \leq \underbrace{\overset{\text{Horas disponibles}}{500}}_{\text{LADO DERECHO}}$$

Matemáticamente la restricción es: $8\,x_1 + 4\,x_2 \leq 500$

Condición de No negatividad: $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq$ ó $Xi \geq 0;\ i = 1,2$

Resumiendo tenemos el siguiente Modelo matemático de Programación Lineal del Problema (un modelo con dos variables y una restricción, estando listo para aplicar un método de solución:

Minimizar:	$C = 3x_1 + 5x_2$	*(Función Objetivo)*
Sujeto a:	$8x_1 + 4x_2 \leq 500$	*(Restricción)*
	$x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0$	*(No negatividad)*

2). Líneas de Producción.- Un empresario tiene 80 kg de acero y 120 kg de aluminio, y quiere fabricar dos modelos de bicicletas: bicicletas de paseo y bicicletas de montaña, para venderlas en el mercado a S/. 200 y S/. 150 respectivamente cada modelo, a fin de obtener el máximo beneficio. Para la bicicleta de paseo empleará 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para la bicicleta de montaña usará 2 kg de ambos metales. Formular el modelo matemático de programación lineal, que permita determinar la cantidad óptima de bicicletas a producir, para obtener el mayor beneficio económico.

Formulación del Modelo

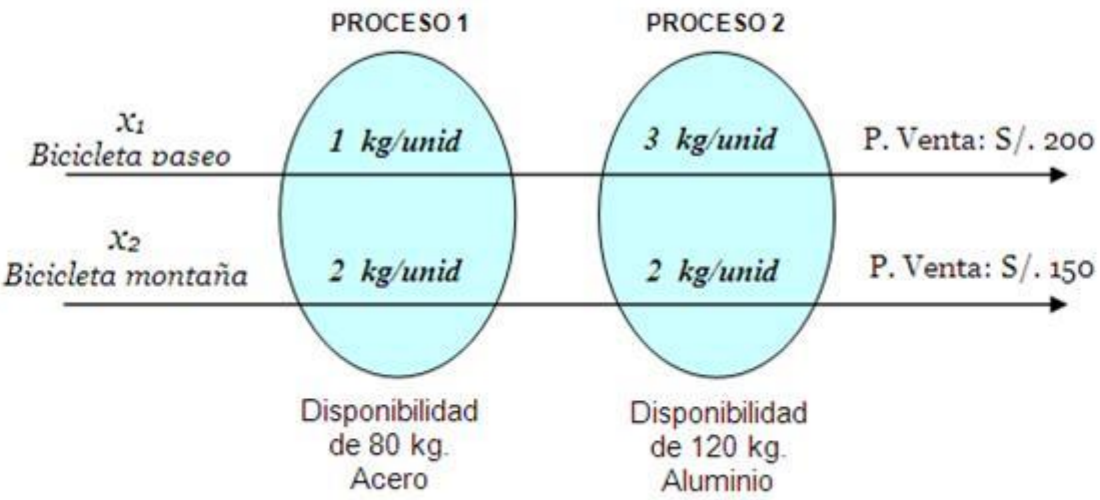

Figura 8.2.3.-Problema mediante un organizador gráfico o esquema

Definición de Variables:

Se desea determinar la cantidad de bicicletas a producir por cada modelo (paseo y montaña), por lo tanto tendremos dos variables.

Sean: $x1$ = Cantidad de bicicletas de paseo a fabricar

$x2$ = Cantidad de bicicletas de montaña a fabricar

Función Objetivo

El objetivo del problema es maximizar los beneficios económicos totales (Z) de los modelos de bicicletas que fabricará el empresario.

Precio de venta de la bicicleta de paseo = S/. 200

Precio de venta de la bicicleta de montaña = S/. 150

Beneficio económico = Precio de venta unitario x cantidad a fabricar

Beneficio económico total de bicicleta de paseo = $200\ x1$

Beneficio económico total de bicicleta de montaña = $150\ x2$

Luego la Función objetivo será: Maximizar: $Z = 200\ x1 + 150\ x2$

Definición de Restricciones

Elaboramos una tabla de materia prima consumida (Acero y Aluminio) por cada modelo de bicicleta (paseo y montaña) y su disponibilidad:

Modelo de bicicleta	**Acero**	**Aluminio**
Paseo	1 kg.	3 kg.
Montaña	2 kg.	2 kg.
Disponibilidad de *materia* prima	80 kg.	120 kg.

Tabla 8.2.4.- Restricción del consumo de Acero en la fabricación de bicicletas:

$1\ x1 + 2\ x2 < 80$

Restricción del consumo de Aluminio en la fabricación de bicicletas:

$3\ x1 + 2\ x2 < 120$

Observación:

- El lado derecho de las restricciones, 80 y 120 representa la disponibilidad en kg. de acero y aluminio respectivamente (materia prima).
- El lado izquierdo en las restricciones indica el consumo unitario de materia prima por cada modelo de bicicleta.
- Condición de no negatividad: La producción de cada modelo de las bicicletas pueden ser cero (0) o mayor que cero, o sea: $x1, x2 = 0$

Luego el Modelo matemático de Programación Lineal (con dos variables y dos restricciones) será:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximizar:} \quad & Z = 200\,x_1 + 150\,x_2 \\
\text{Sujeto a:} \quad & x_1 + 2\,x_2 \leq 80 \\
& 3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120 \\
& x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

3). Caso de toma de decisiones.- Suponga con los datos del problema

2) Anterior, si el empresario por restricción económica decide hacer solo un modelo de bicicleta. ¿Cuál modelo debe elegir? ¿Por qué?

Las alternativas de fabricación se desarrollan en las restricciones del Modelo matemático; y la toma de decisiones se determina evaluando en la Función objetivo las alternativas obtenidas.

La decisión a tomar, por restricción económica, es producir un solo modelo de bicicleta que genere mayor beneficio al empresario. Luego desarrollamos las alternativas evaluando en las restricciones del modelo:

- ***Alternativa 1**: Producir solo bicicletas de paseo y no producir bicicletas de montaña, significa hallar x_1 haciendo $x_2 = 0$*

  Reemplazamos en la primera restricción: $x_1 + 2\,x_2 \leq 80$

  $x_1 + 2\,(0) \leq 80$ luego: $x_1 \leq 80$

  Reemplazamos en la segunda restricción: $3\,x_1 + 2\,x_2 \leq 120$

  $3\,x_1 + 2\,(0) \leq 120$ luego: $x_1 \leq 40$

Tomamos el valor de x_1 que cumpla en ambas restricciones, y debe ser el mínimo de los valores obtenidos: Min (80, 40) = 40 ; o sea: $\mathbf{x_1 = 40}$

- ***Alternativa 2**: Producir solo bicicletas de montaña y no producir bicicletas de paseo, significa hallar x_2 haciendo $x_1 = 0$*

Seguimos el mismo procedimiento realizado en el punto anterior, evaluando en las restricciones del modelo y hallamos: $\mathbf{x_2 = 40}$

(El lector debe demostrar el valor de x_2 obtenido).

La toma de decisiones se realiza evaluando en la Función objetivo las alternativas de fabricación obtenidas por modelo de bicicleta. A continuación se muestra el procedimiento a realizar.

- ***Beneficio económico de fabricar solo bicicletas de paseo y no fabricar bicicletas de montaña:***

  Alternativa 1: Para $x_1 = 40$ y $x_2 = 0$

  Reemplazamos en la Función Objetivo: $Z = 200\,x_1 + 150\,x_2$

  ; obtenemos: Z = S/. 8,000

- ***Beneficio económico de fabricar solo bicicletas de montaña y no fabricar bicicletas de paseo:***

  Alternativa 2: Para $x_2 = 40$ y $x_1 = 0$

  Reemplazamos en la Función Objetivo: $Z = 200\,x_1 + 150\,x_2$

  ; obtenemos: Z = S/. 6,000

Toma de decisiones:

Como la función objetivo es maximizar el beneficio económico, generado por las ventas, tomamos la decisión de fabricar solo bicicletas de paseo, por ser el modelo que va generar mayor ganancia, equivalente a S/. 8,000.

Observación:

Hemos demostrado la importancia de formular un modelo matemático adecuado, ya que un error en la formulación del Modelo, nos puede llevar a tomar una decisión equivocada que puede generar graves consecuencias para la empresa u organización.